

**В.Л. ТИМЧЕНКО**, канд. техн. наук, доц. НУК (м. Миколаїв),  
**О.О. УХІН**, магістр, НУК (м. Миколаїв),  
**О.О. МАХНОВА**, магістр, НУК (м. Миколаїв)

## **МОДЕЛЮВАННЯ РОБАСТНИХ СТРУКТУРНО- ПЕРЕМИКАЛЬНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ**

Розглянуто порядок синтезу оптимальних керуючих функцій в багатовимірних лінійних системах на основі побудови спеціальної структурної конфігурації перемикальних зворотних зв'язків, яка забезпечує задану траєкторію руху об'єкта керування. При неповній апріорній інформації про об'єкт на основі еталонної моделі руху формується корегувальний керуючий вплив, що забезпечує робастність системи керування. Приведено результати моделювання, що підтверджують забезпечення заданих показників точності керування при некоректно заданих параметрах реального об'єкта та дії невимірних зовнішніх збурень. *Лл.: 7. Бібліогр.: 9 назв.*

**Ключові слова:** структурно-перемикальні системи керування, еталонна модель, робастність системи.

**Постановка проблеми та аналіз літератури.** Необхідність керування в невизначених умовах та жорстких вимогах до використання обмежених запасів енергії та швидкодії для досягнення об'єктом керування заданого стану привело до таких основних напрямків сучасної теорії автоматичного керування як ідентифікація систем, оптимальне та робастне керування [1 – 3].

В той же час необхідно відзначити в проблемі оптимізації систем значну увагу сугубо математичним додаткам, які часто не знаходять прикладного використання чи не мають можливості фізично реалізуватись в наслідок громіздкості [3]. Розробка інженерних методів синтезу оптимальних систем автоматичного керування передбачає використання достатньо обґрунтованих методів імітаційного моделювання та дослідницького узагальнення і систематизації для конкретного об'єкту керування в протизагу строго математичному доказу для довільної узагальненої моделі с подальшим суттєвим спрощенням для практичних задач. Таким чином, створення інженерних методів синтезу оптимальних систем керування динамічними об'єктами є нагальною проблемою для розвитку сучасної теорії автоматичного керування. Одним з таких шляхів вирішення задачі керування є застосування принципу зворотної динаміки та динамічних зворотних зв'язків, що розглянуті, зокрема, в роботах [4 – 7]. До таких методів відноситься метод структурно-перемикальних зворотних зв'язків [8, 9], що забезпечує побудову оптимальної траєкторії руху для заданих граничних умов та синтез керуючих функцій в зворотному зв'язку об'єкта керування на основі математичної моделі об'єкта. В той же час реальні системи керування функціонують в умовах неповної апріорної інформації та невимірних зовнішніх збуреннях, що потребує розробки робастних систем керування.

**Мета статті** – розвиток методу структурно-перемикальних зворотних зв'язків для вирішення задач керування в умовах невизначеності та створення робастних алгоритмів керування багатовимірними динамічними об'єктами.

**Основні етапи синтезу керувань методом структурно-перемикальних зворотних зв'язків.** Довільну фазову траєкторію переходу об'єкта керування з початкового стану до заданого можна описати як сукупність відрізків траєкторії з постійною похідною визначеного порядку. Планування фазової траєкторії об'єкта керування для заданих початкових і кінцевих умов включає:

- визначення необхідної кількості відрізків фазової траєкторії з постійними значеннями відповідних похідних вектора фазових координат;
- обчислення моментів перемикання керувань в зворотних зв'язках.

Фазова траєкторія динамічного об'єкта, наприклад, для вектора  $\mathbf{X}(t)$  представимо для  $i$ -го відрізка траєкторії за допомогою розкладення в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t_{i+1}) = \mathbf{X}(t_i) + \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} \Big|_{t_i} \frac{\Delta t^l}{1!} + \frac{d^2\mathbf{X}(t)}{dt^2} \Big|_{t_i} \frac{(\Delta t^l)^2}{2!} + \\ \dots + \frac{d^k\mathbf{X}(t)}{dt^k} \Big|_{t_i} \frac{(\Delta t^l)^k}{k!} + \dots + \mathbf{R}_p, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\mathbf{X}(t) = \{x_x(t), x_y(t), x_z(t)\}$  – вектор фазової координати руху по координатним осям  $l = \{x, y, z\}$ ;  $\mathbf{R}_p$  – вектор, визначаючий остаточні члени ряду Тейлора;  $\Delta t^l = t_{i+1}^l - t_i^l$ ;  $t_i^l, t_{i+1}^l$  – початковий і кінцевий моменти часу руху об'єкта по кожній з координатних осей на  $i$ -ом відрізку.

Треба відзначити, що представлення довільного відрізка планованої траєкторії виразом (1) можливо в загальному випадку застосувати, в тому числі, для нелінійного нестационарного об'єкта керування. Вид траєкторії руху визначається максимальним порядком постійної похідної фазової координати та значеннями похідних.

На основі енергетичного аналізу можливо сформулювати принципи оптимальності для траєкторій виду (1) наступним чином: траєкторія буде оптимальною за швидкодією при русі з максимальною можливою кількістю похідних вектора координат та їх максимальними значеннями, при цьому це буде траєкторія з найбільшими витратами енергії. Максимальна можлива кількість похідних вектора координат, а також величина їх значень визначається обмеженнями на енергію керуючого впливу.

Розглянемо загальний порядок синтезу керуючих функцій в зворотних зв'язках стаціонарного багатовимірного об'єкта  $n$ -го порядку, що описується системою диференціальних рівнянь в векторно-матричній формі

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \quad (2)$$

де  $\mathbf{X}(t)$  – вектор фазових змінних (чи змінних стану) розмірністю  $n \times 1$ ;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  – матриці коефіцієнтів  $n \times n$ ;  $\mathbf{U}(t)$  – вектор керуючих функцій  $n \times 1$ .

Для широкого класу динамічних об'єктів можна рахувати, що компоненти вектора  $\mathbf{X}(t)$  безперервні і диференційовані, а компоненти вектора  $\mathbf{U}(t)$  – кусочно-безперервні і кусочно-диференційовані (можливі розриви в точках переключення).

Після диференціювання рівняння (2) отримаємо другу похідну

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}(t), \quad (3)$$

а після повторення процедури диференціювання, третю

$$\ddot{\ddot{\mathbf{X}}}(t) = \mathbf{A}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{U}}(t). \quad (4)$$

При русі об'єкта з умовою  $\ddot{\mathbf{X}}(t) = 0$  після підстановки послідовно рівняння (2) в (3) та далі в (4) отримаємо

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{U}}(t) = -\mathbf{A}^3\mathbf{X}(t) - \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{U}(t) - \mathbf{A}\mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}(t).$$

Застосування перетворення Лапласа з урахуванням начального значення вектора керуючих функцій  $\mathbf{U}_0$  і векторно-матричних перетворень, запишемо

$$\mathbf{U}(p) = -\mathbf{B}^{-1}(p^2\mathbf{E} + p\mathbf{A} + \mathbf{A}^2)^{-1}[\mathbf{A}^3\mathbf{X}(p) - (p\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{U}_0 - \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}_0],$$

де  $\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0$  – вектора початкових кількісних значень керуючої функції;  $\mathbf{E}$  – одинична матриця;  $p$  – оператор Лапласа.

Для загального випадку, при котрому похідна  $k$ -го порядку вектора фазових координат  $\mathbf{X}(t)$  дорівнює нулю, отримаємо вираз

$$\overset{(k)}{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A} \overset{(k-1)}{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{B} \overset{(k-1)}{\mathbf{U}}(t) = 0.$$

В результаті відповідних векторно-матричних перетворень вектор керуючих функцій запишемо в вигляді

$$\mathbf{U}(p) = -\mathbf{B}^{-1}(p^{k-1}\mathbf{E} + \mathbf{A}_k)^{-1}[\mathbf{A}^k\mathbf{X}(p) - \mathbf{U}_0(p)],$$

де матриця  $\mathbf{A}_k = \sum_{j=0}^{k-2} p^j \mathbf{A}^{k-j-1}$ ;  $k=2, \dots, n$ ;  $\mathbf{U}_0(p)$  – початковий вектор керуючої функції, що визначається у відповідності до правил перетворення Лапласа.

Структурна схема структурно-перемикальної системи керування багатовимірним динамічним об'єктом (рис. 1) включає блок ключів перемикання (БКП), що здійснює в розрахований на основі рішення алгебраїчних рівнянь, які описують фазові траєкторії руху з урахуванням заданих граничних умов, моменту часу  $t_n$  включення необхідного каналу керування в ланцюзі зворотного зв'язку; при цьому інші канали керування вимкнуті.

### **Синтез керуючих функцій для формування корегувального сигналу.**

При побудові систем автоматичного керування динамічними об'єктами параметри динамічної моделі об'єкту, що покладені в основу синтезу, в реальних системах відрізняються від розрахункових в силу неможливості фізично визначити та математично описати всі чинники, які впливають на значення чи описуючу функцію параметру. Наприклад, коефіцієнт

гідродинамічного опору морського рухомого об'єкта (МРО) залежить в тому числі від форми корпусу МРО, яка в процесі експлуатації може змінюватись, та густини водного середовища, значення якого теж не є постійним для різних акваторій експлуатації МРО. Одним із ефективних шляхів усунення невизначеності параметрів динамічної моделі об'єкта при синтезі керування є створення робастних алгоритмів на основі еталонної моделі об'єкта. Таким чином на основі методу структурно-перемикальних зворотних зв'язків формується еталонна модель руху об'єкта керування з керуючими функціями в зворотному зв'язку, сигнал з яких поступає на вхід реального об'єкта керування та далі формується корегувальний сигнал на основі порівняння сигналу з виходу моделі з сигналом з виходу об'єкта керування.

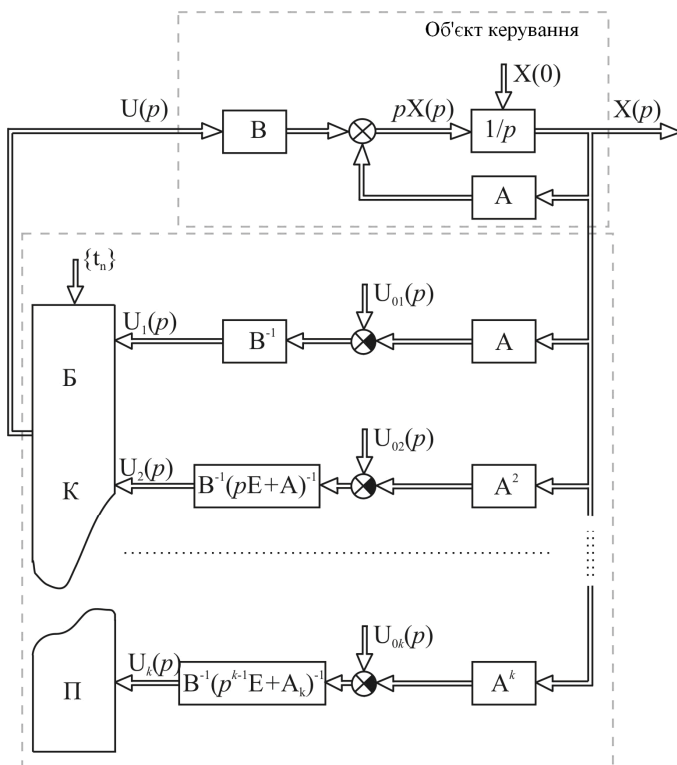


Рис. 1. Структурна схема структурно-перемикальної системи керування

Розглянемо одномірну систему. Для еталонної моделі запишемо рівняння

$$\dot{x}_m(t) = ax_m(t) + bu(t)$$

де  $x_m$  – фазова координата моделі.

Реальний об'єкт виразимо математично наступним чином

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b[u(t) + u_\varepsilon(t)] . \quad (5)$$

Фактично це визначає систему з відомою моделлю реального об'єкта, на виході якого вимірюється вихідний сигнал з шумом. Помилка системи керування при цьому визначиться  $\varepsilon(t) = x_m(t) - x(t)$ , чи після диференціювання  $\dot{\varepsilon}(t) = \dot{x}_m(t) - \dot{x}(t)$ , що дозволяє записати

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{x}_m(t) - \dot{x}(t) = a[x_m(t) - x(t)] - bu_\varepsilon(t) = a\varepsilon(t) - bu_\varepsilon(t) .$$

Сформуємо вимоги до значень похибки в вигляді виконання умови

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \gamma_1 \dot{\varepsilon}(t) = 0 ,$$

де  $\gamma_1$  – ваговий коефіцієнт;

та матимемо рівняння для корегувального сигналу керування

$$u_\varepsilon(p) = \frac{(a^2 + \gamma_1 a)\varepsilon(p) + bu_\varepsilon(0)}{b(p + a + \gamma_1)} , \quad (6)$$

де  $u_\varepsilon(0)$  – значення корегувального сигналу у початковий момент часу.

Для випадку виконання умови, що враховує значення похибки та двох її перших похідних, запишемо

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \gamma_1 \dot{\varepsilon}(t) + \gamma_2 \varepsilon = 0 ,$$

де  $\gamma_2$  – ваговий коефіцієнт;

та матимемо рівняння для корегувального сигналу керування

$$u_\varepsilon(p) = \frac{(a^2 + \gamma_1 a + \gamma_2)\varepsilon(p) + bu_\varepsilon(0)}{b(p + a + \gamma_1)} . \quad (7)$$

Якщо не враховувати другу похідну похибки, тобто,  $\dot{\varepsilon}(t) + \gamma_2 \varepsilon = 0$ , то корегувальний сигнал прийме вид

$$u_\varepsilon(p) = \frac{(a + \gamma_2)\varepsilon(p)}{b} . \quad (8)$$

Треба відзначити, що саме вибір вагових коефіцієнтів  $\gamma_1, \gamma_2$  забезпечує робастність системи. Дійсно, з виразів для корегувальних сигналів (6), (7) та (8) слідує, що при заданих значеннях фізичних параметрів системи  $a, b$ , можна підібрати вагові коефіцієнти, які забезпечують інваріантність системи до некоректно заданих апріорних значень параметрів  $a, b$ .

Функціональна схема системи керування для загального випадку представлена на рис. 2.

Для багатовимірного об'єкту для вектору похибки запишемо

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Z}(t) - \mathbf{B}\mathbf{U}_\mathbf{Z}(t) .$$

Для виконання умов для вектору похибок системи

$$\mathbf{G}_1 \dot{\mathbf{Z}}(t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t) = 0 ,$$

де  $\mathbf{G}_1$  – позитивно визначена симетрична матриця вагових коефіцієнтів, матимемо для вектора корегувальних сигналів

$$\mathbf{U}_3(p) = \mathbf{B}^{-1}(p\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{G}_1\mathbf{E})^{-1}((\mathbf{A}^2 + \mathbf{G}_1\mathbf{A})\mathfrak{Z}(p) + \mathbf{B}\mathbf{U}_3(0)) .$$

При умові

$$\mathbf{G}_2\mathfrak{Z}(t) + \mathbf{G}_1\dot{\mathfrak{Z}}(t) + \ddot{\mathfrak{Z}}(t) = 0 ,$$

де  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$  – матриці вагових коефіцієнтів, запишемо для вектора корегувальних сигналів

$$\mathbf{U}_3(p) = \mathbf{B}^{-1}(p\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{G}_1\mathbf{E})^{-1}((\mathbf{A}^2 + \mathbf{G}_1\mathbf{A} + \mathbf{G}_2)\mathfrak{Z}(p) + \mathbf{B}\mathbf{U}_3(0)) .$$

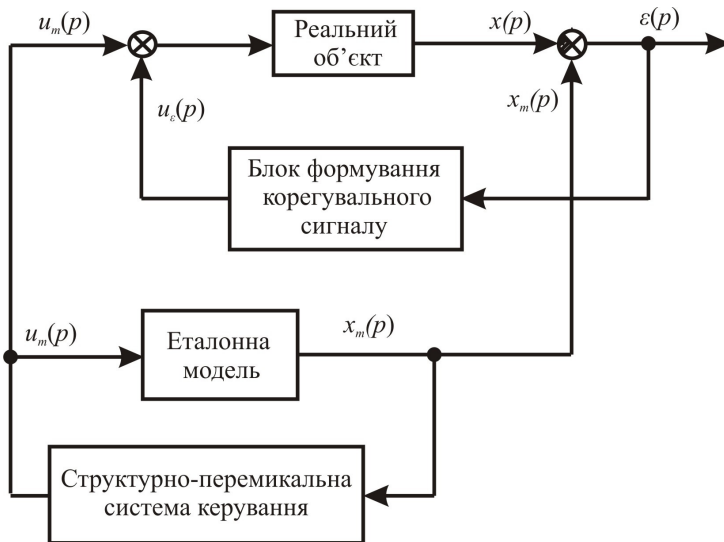


Рис. 2. Функціональна схема системи керування

Таким чином отримані вирази керуючих функцій визначають значення корегувального керуючого сигналу робастної системи керування багатовимірним динамічним об'єктом.

**Приклади моделювання.** Розглянемо систему керування (рис. 3) об'єктом першого порядку, що описується рівнянням (5) з початкового стану  $x=0$ ;  $\dot{x}=0$  в заданий стан  $x=25$ ;  $\dot{x}=0$  за умови  $\ddot{x}=0$ . Параметри реального об'єкта визначаються некоректно наступним чином:  $a^* = -0.5$ ;  $b^* = 0.5$ . Параметри еталонної моделі:  $a = -0.1$ ;  $b = 0.1$ . Траєкторія руху об'єкта складається з двох відрізків. Перший відрізок:  $t = 0 \div 0.5$  с,  $\ddot{x} = 100$ ;

другий відрізок:  $t = 0.5 \div 1.0$  с,  $\ddot{x} = -100$ . В момент часу  $t = 0.5$  с здійснюється перемикання керуючих функцій. Зовнішнє збурення представлено на рис. 4. Корегувальний сигнал має наступний вигляд:  $u_{\varepsilon}(p) = 299\varepsilon(p)$ .

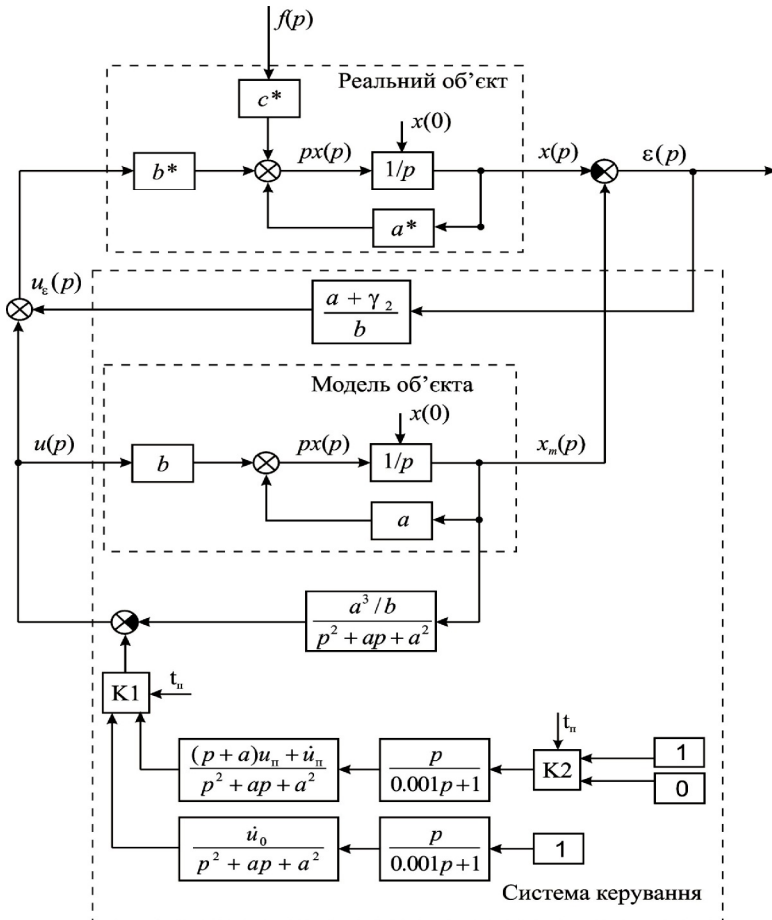


Рис. 3. Структурна схема робастної системи керування з еталонною моделлю

Результати моделювання, представлені на рис. 4 – 7, демонструють, що при некоректно заданих параметрах реального об'єкта та дії зовнішнього збурення, система керування приводить об'єкт керування в задану точку з високими показниками точності (значення похибки дорівнює 0.2%). В системі керування при русі по планованій траєкторії формується незначне значення похибки, що не приводить до значних витрат енергії на формування корегувального сигналу.

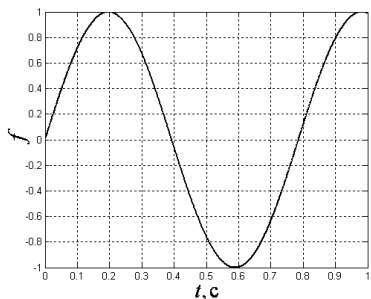


Рис. 4. Зовнішнє збурення

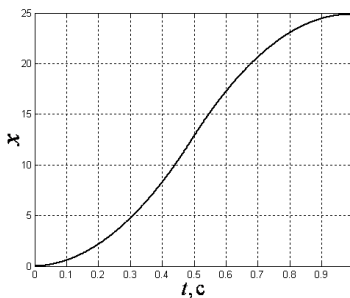


Рис. 5. Траєкторія руху моделі

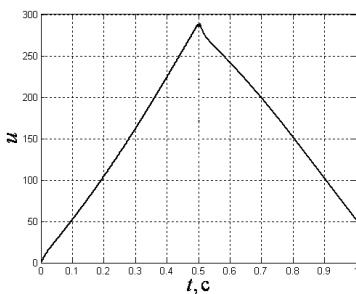


Рис. 6. Керуючий вплив

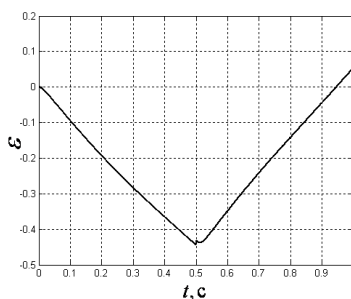


Рис. 7. Похибка системи

**Висновок.** Розроблено метод робастного керування багатовимірним динамічним об'єктом на основі використання керуючого впливу на виході еталонної моделі руху об'єкта по оптимальній траєкторії, сформованої на основі структурно-перемикальних зворотних зв'язків, та корегувального керуючого впливу, що синтезується при заданих показниках точності керування на основі порівняння вихідного сигналу еталонної моделі та реального об'єкта керування. Таким чином досягаються при неповній апіорній інформації про параметри об'єкту керування задані значення похибки керування та її похідні, а також інваріантність керування по відношенню до фізичних збурень.

**Список літератури:** 1. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1974. — 392 с. 2. Чаки Ф. Современная теория управления / Ф. Чаки – М.: Мир, 1975. – 424 с. 3. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. — 303 с. 4. Справочник по теории автоматического управления // Под ред. Красовского А.А. – М.: Наука, 1987. – 711 с. 5. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем / П.Д. Крутько. – М.: Наука, 1988. — 328 с. 6. Габасов Р. Реализация ограниченной обратной связи в нелинейной задаче регулирования / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Е.А. Ружицкая // Кибернетика и системный анализ. – К. – 2009. – № 1. – С. 108 – 117. 7. Ларин В.Б. Стабилизация системы обратной связью по выходной переменной / В.Б. Ларин // Проблемы управления и информатики. – К. – 2004. – № 2. – С. 5 – 18. 8. Kondratenko Y.P. Optimal feedback switching method for linear control systems / Y.P. Kondratenko, V.L. Timchenko // Systems and



Networks: Mathematical Theory and Applications (Mathematical Research). – Berlin: Academia Verlag, 1994. – Vol. 79. – P. 291 – 292. 9. Тимченко В.Л. Оптимальное управление линейным объектом на основе метода структурно-переключаемых обратных связей / В.Л. Тимченко // Вісник НТУ "ХПИ". – Тематичний випуск "Інформатика та моделювання". – Харків. – 2009. – № 13. – С. 167 – 175.

*Стаття представлена д.т.н. проф. НУК Кондратенко Ю.П.*

УДК 681.5

**Моделирование робастных структурно-переключаемых систем управления динамическими объектами** / Тимченко В.Л., Ухин О.А., Махнова О.А. // Вестник НТУ "ХПИ". Тематический выпуск: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2010. – № 21. – С. 173 – 181.

Рассмотрен порядок синтеза оптимальных управляющих функций в многомерных линейных системах на основании построения специальной структурной конфигурации переключаемых обратных связей, которая обеспечивает заданную траекторию движения объекта управления. При неполной априорной информации про объект на основании эталонной модели движения формируется корректирующее управляющее воздействие, которое обеспечивает робастность системы управления. Приведены результаты моделирования, которые подтверждают обеспечение заданных показателей точности управления при некорректно заданных параметрах реального объекта и действии неизмеряемых внешних возмущений. Ил.: 7. Библиогр.: 9 назв.

**Ключевые слова:** структурно-переключаемые системы управления, эталонная модель, робастность системы.

UDC 681.5

**Modeling of robust structural-commuted control systems of dynamic objects** / Timchenko V.L., Ukhin O.A., Makhnova O.A. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkiv: NTU "KhPI". – 2010. – № 21. – P. 173 – 181.

The order of synthesis of optimum managing functions is considered in the multidimensional linear systems on the basis of construction of the special structural configuration of the commuted feed-backs, which provides the set trajectory of motion of management object. At a priori incomplete information about an object on the basis of standard model of motion correcting managing influence which provides robust control system is formed. Results are resulted designs which confirm providing of the set indexes of exactness of management at incorrectly preset parameter of the real object and action of immeasurable external indignations. Figs: 7. Refs: 9 titles.

**Keywords:** structural-commuted control systems, etalon model, robust control system.

*Поступила в редакцию 25.03.2010*